

# Chapitre XXVI

## DIFFUSION.

Joël SORNETTE vous prie de ne pas utiliser son cours à des fins professionnelles ou commerciales sans autorisation.

*Les phénomènes diffusifs se rencontrent partout en physique : diffusion de particules, diffusion thermique, loi d'OHM, viscosité. Nous étudierons ici les deux premières pour lesquelles l'analogie est la plus grande. Nous signalerons aussi l'analogie entre conductance thermique et conductance électrique.*

### XXVI-1 Diffusion de particules.

#### XXVI-1.a Convection et diffusion, approche qualitative.

Sept heures du matin, le réveil vient de sonner. Un grand bol de café s'avère nécessaire et j'y plonge un sucre qui fond presque instantanément. Un problème de taille se présente : le fond du bol est un sirop écœurant et le dessus est trop amer ; comment faire pour homogénéiser mon breuvage matinal ?

La méthode de loin la plus efficace consiste à touiller<sup>1</sup> avec une petite cuillère. On réalise ainsi des courants de café qui brassent les régions trop sucrées et celles qui ne le sont pas assez. Cette méthode est d'une bonne efficacité. On a réalisé un transfert de particules (les molécules de saccharose) par *convection*. Elle n'est pas toujours possible (pas de convection dans un solide) ou souhaitable (si les particules sont toxiques ou polluantes).

Une autre méthode, bien moins fatigante, consiste à attendre. Les molécules de saccharose sont soumises à l'agitation thermique, elles ont un mouvement constitué d'une suite de trajets rectilignes très courts dans toutes les directions et elles finissent par s'éloigner progressivement de leur position initiale. Il s'agit ici d'un transfert par *diffusion*. Donnons quelques autres exemples : diffusion dans l'air de l'odeur d'un pot-pourri de fleurs séchées, diffusion d'une tache de sirop de grenadine sur la robe neuve de ma fille (c'est une chimiste précoce qui adore la chromatographie), diffusion des ions dans une pile électrochimique (ce qui limite la cinétique), diffusion des neutrons d'un réacteur nucléaire à travers les parois de protection, oxydation des métaux par

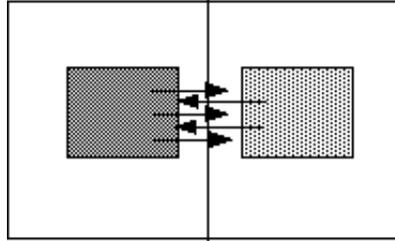
---

<sup>1</sup>remuer

diffusion du dioxygène à partir de la surface, fabrication de semi-conducteurs dopés par diffusion d'impuretés à travers le silicium, fabrication de fibres optiques à gradient d'indice par diffusion d'additifs dans le verre, etc.

Supposons qu'une surface plane sépare une région riche en un type de particules, disons à gauche, et une région pauvre en ce même type de particules, à droite donc. L'agitation thermique fait que dans chaque région les particules diffusent ; l'agitation est isotrope et la même proportion diffuse vers la droite que vers la gauche. Il se passe ceci pour la surface de séparation : une proportion donnée du grand nombre de particules de gauche la traverse vers la droite et la même proportion d'un petit nombre de particules la traverse vers la gauche ; le bilan est que la région de gauche s'est appauvrie et celle de droite enrichie par un *flux*<sup>2</sup> de particules allant de la région riche vers la région pauvre.

On peut schématiser la situation par la figure ci-dessous.



### XXVI-1.b Flux de particules, bilan de particules.

#### Approche unidirectionnelle :

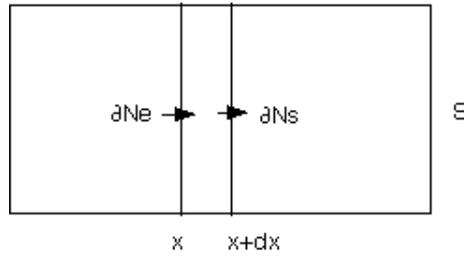
Dans un cylindre d'axe  $Ox$  et de section  $S$ , un solvant contient une densité particulaire non uniforme  $n(x)$  de particules qui vont donc diffuser. Une section d'abscisse  $x$  est donc traversée par les particules qui diffusent ; on convient de compter positivement celles qui traversent dans le sens des  $x$  croissants et négativement dans le sens décroissant. On appelle flux le nombre de particules traversant  $S$  par unité de temps et densité de flux le rapport de ce flux à l'aire  $S$ , on le note, par analogie avec l'électrocinétique et la mécanique des fluides,  $j(x)$ . Ainsi, le nombre de particules traversant  $S$  pendant un temps  $dt$  est :

$$\delta N = j(x) S dt$$

Faisons maintenant un bilan entre les instants  $t$  et  $t + dt$  des particules situées entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  donc dans un volume  $S dx$ . A l'instant initial, ce volume contient  $N(t) = n(x, t) S dx$  particules. Pendant  $dt$ , il en entre  $\delta n_e = j(x) S dt$  par la face d'abscisse  $x$  et il en sort  $\delta n_s = j(x + dx) S dt$  par l'autre. A la fin, on a donc :

$$N(t + dt) = n(x, t) S dx + j(x) S dt - j(x + dx) S dt$$

<sup>2</sup>fluo, fluis, fluere, fluxi, fluxum : couler, s'écouler



Qu'on identifie à  $n(x, t + dt) S dx$ , d'où après division par  $S dx dt$  :

$$\frac{n(x, t + dt) - n(x, t)}{dt} + \frac{j(x + dx) - j(x)}{dx} = 0$$

soit

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

### Approche tridirectionnelle :

Nous nous contenterons de donner ici les grandes lignes d'un raisonnement qui figure déjà deux fois dans ce cours (conservation de la charge en électromagnétisme et conservation de la masse en mécanique des fluides).

On définit un vecteur densité de flux ou densité de courant de particules qui, en plus de ce qui figure ci-dessus, tient compte de la direction moyenne de diffusion ; ainsi, le nombre de particules traversant une surface élémentaire de vecteur surface  $\vec{dS}$  pendant un temps  $dt$  est :

$$\delta N = \vec{j} \cdot \vec{dS} dt$$

Imaginons un volume  $\Omega$  divisé en volumes élémentaires  $d\Omega$  et limité par une surface fermée  $\Sigma$  divisée en surfaces élémentaires de vecteurs surfaces  $\vec{d\Sigma}$ . Appelons  $N(t)$  le nombre de particules contenues dans  $\Omega$  à l'instant  $t$ . Evaluons de deux façons la dérivée temporelle de  $N(t)$ .

Première approche :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} dN = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} n d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial n}{\partial t} d\Omega$$

Deuxième approche :  $\frac{dN}{dt}$  est l'opposé du débit sortant soit :

$$\frac{dN}{dt} = -\oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{d\Sigma} = -\iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{j}) d\Omega$$

En égalant les deux expressions, on tire :

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) \right) d\Omega$$

Et ceci soit vrai quel que soit le domaine  $\Omega$ , donc :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0}$$

A ce stade du raisonnement, il ne s'agit que d'une loi de conservation ; elle est vraie que le transport de particules se fasse par diffusion ou convection. Ce qui fera la différence entre ces deux comportements, c'est l'expression de  $\vec{j}$  en fonction de la situation. Pour la convection, par analogie avec la mécanique des fluides, on aurait  $\vec{j} = n \vec{v}$  où  $\vec{v}$  est la vitesse mésoscopique du fluide.

### XXVI-1.c Loi de FICK, équation de diffusion.

#### Loi de FICK.

Le vecteur densité de flux est lié aux inhomogénéités du champ de densité particulaire. La loi *phénoménologique* de FICK rend compte des résultats expérimentaux, indépendamment de toute tentative de justification théorique (il en existe, mais ce n'est pas l'objet du programme). Elle énonce la proportionnalité entre le vecteur densité de flux et le gradient de la densité particulaire, avec un coefficient négatif car la diffusion se fait des régions riches vers les régions pauvres. On note :

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\operatorname{grad}n}$$

et dans un problème unidirectionnel :

$$j(x) = -D \frac{\partial n}{\partial x}$$

$D$  s'appelle *coefficient de diffusion* ou *diffusivité*.

La loi de FICK est un modèle qui donne une bonne compatibilité avec les résultats expérimentaux ; on peut néanmoins la mettre en défaut si les gradients de concentration sont très importants ou si les variations temporelles de densité particulaire sont trop rapides.

#### Unité et ordres de grandeur.

Le nombre de particules n'est pas dimensionné. La dimension de  $j$  est donc  $[j] = \text{L}^{-2} \text{T}^{-1}$  au vu de sa définition ; celle de  $n$  est  $[n] = \text{L}^{-3}$  et donc  $[\operatorname{grad}(n)] = \text{L}^{-4}$  ; d'où  $[D] = \text{L}^2 \text{T}^{-1}$ .  $D$  s'exprime donc en  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . La diffusivité de molécules dans un gaz aux conditions ordinaire varie, selon la nature des molécules de  $10^{-6}$  à  $10^{-4} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ , dans un liquide de  $10^{-12}$  à  $10^{-8} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  et d'atomes dans un solide de  $10^{-30}$  à  $10^{-16} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . La diffusion dans un gaz est plus aisée que dans un liquide car le libre parcours moyen est mille plus grand ; elle est plus aisée dans un liquide que dans un solide car dans un liquide les molécules peuvent s'écarter pour laisser le passage à une particule.

Notez que lorsqu'on s'intéresse, par exemple, à la diffusion dans l'eau des molécules d'eau qui sont initialement à un endroit précis, on parle d'*autodiffusion*.

**Equation de diffusion.**

Dans un problème unidirectionnel, on reporte  $j(x) = -D \partial n / \partial x$  dans  $\partial n / \partial t + \partial j / \partial x = 0$  et l'on tire :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

Dans un problème tridimensionnel, on reporte  $\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$  dans  $\partial n / \partial t + \text{div}(\vec{j}) = 0$  et l'on tire :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} n)$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n}$$

Aucune technique de résolution n'est au programme, nous en aborderons en exercices ou en TD d'informatique.

Notons qu'à la différence d'une équation de propagation ( $\partial^2 f / \partial t^2 = c^2 \partial^2 f / \partial x^2$ ), on a une dérivée temporelle première au lieu d'une dérivée seconde; voyons les différences que cela apporte.

**Irréversibilité.**

Supposons que  $f(x, t)$  soit solution ou bien d'une équation de diffusion, ou bien d'une équation de propagation. Alors la fonction  $g(x, t) = f(x, -t)$ , obtenue par *retournement du temps* représente une évolution en remontant le temps. Par dérivation à  $x$  constant, on a  $\partial g / \partial t = -\partial f / \partial t$  et  $\partial^2 g / \partial t^2 = \partial^2 f / \partial t^2$ , donc  $g$  serait aussi solution d'une équation de propagation, mais pas d'une équation de diffusion. Ceci met en évidence l'*irréversibilité* de la diffusion.

**Temps et longueur caractéristiques.**

Soit  $T$  un temps caractéristique de variation et  $L$  une longueur caractéristique de variation.  $\partial^2 n / \partial x^2 \sim n / L^2$ ,  $\partial n / \partial t \sim n / T$  et  $\partial^2 n / \partial t^2 \sim n / T^2$ . Si  $n$  est solution d'une équation de propagation, on en tire que  $L = cT$ , ce qui justifie une propagation à vitesse constante. Par contre pour l'équation de diffusion, on en tire :

$$\frac{n}{T} = D \frac{n}{L^2} \Rightarrow L^2 = DT$$

Qualitativement, si un type de particules a diffusé sur une longueur  $l$  pendant un temps  $\tau$ , il lui faudra un temps  $100\tau$  pour diffuser sur une longueur  $10l$ ; la diffusion n'est efficace qu'à courte portée.

Quantitativement, revenons à mon bol de café. La diffusivité du sucre dans l'eau est  $D = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$  et mon bol a une taille de  $L = 10 \text{cm}$ , on en tire  $T \sim L^2 / D = 2 \cdot 10^7 \text{s}$  soit quelques mois, je sens que je vais être en retard<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>une pensée à Lewis Carroll

## XXVI-2 Diffusion thermique.

### XXVI-2.a Convection, diffusion, rayonnement.

Les échanges de chaleur entre parties chaudes et parties froides d'un même système peuvent se faire selon trois mécanismes :

- par convection : une élévation de température s'accompagne d'une dilatation, les parties chaudes deviennent moins denses et ont tendance à s'élever, inversement, les parties froides plus denses vont descendre et il s'amorcera ainsi un mouvement de brassage qui finit par uniformiser la température. C'est le mécanisme le plus efficace quand il est possible. Mais il ne l'est pas toujours : il n'y a pas de convection dans un solide, pas de convection non plus dans un liquide froid au fond et chaud en surface.
- par diffusion : même avec une densité particulaire uniforme, la diffusion existe, à ceci près que son bilan à travers toute surface est nul. Nul ? Oui en ce qui concerne le nombre de particules, mais pas forcément l'énergie. En effet dans les régions chaudes, l'énergie cinétique d'agitation thermique des particules est plus élevée que pour les régions froides, donc à travers une surface séparant le chaud et le froid, passe dans un sens un certain nombre de particules très énergétiques et dans l'autre le même nombre de particules moins énergétiques : le bilan n'est donc pas nul et il y a *diffusion thermique*.
- par rayonnement : La matière est composée de particules chargées en mouvement, elle peut donc émettre un rayonnement électromagnétique ; inversement, un rayonnement électromagnétique peut être absorbé (cf diffusion de la lumière solaire par l'atmosphère). Le rayonnement peut se propager à grande distance et permet ainsi des échanges énergétiques à distance. On peut montrer qu'une relation lie la puissance et le spectre de l'onde émise à la température du corps émetteur, mais ce n'est pas l'objet de ce programme. A la différence des deux autres modes, il n'y a pas besoin de support matériel et le *rayonnement thermique* peut se propager dans le vide, heureusement pour nous, terriens, que le soleil chauffe ainsi ! Par contre ce mode d'échange est impossible dans les milieux non transparents.

### XXVI-2.b Flux thermique et bilan énergétique.

Le formalisme est rigoureusement identique à la diffusion particulaire. Nous ne détaillerons donc pas. Une surface élémentaire de vecteur surface  $\vec{dS}$ , pendant le temps  $dt$  est traversée par une chaleur :

$$\delta Q = \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS} dt$$

Le rapport  $\delta Q/dt$  s'appelle *flux thermique* ou puissance thermique et  $\vec{j}_Q$  la densité de flux thermique ou puissance surfacique. Dans un problème unidirectionnel, on aura :

$$\delta Q = j_{th}(x) dS dt$$

Pour le bilan, il faut adapter la raisonnement et on se placera ici uniquement dans le cas d'un solide ou d'un fluide au repos. Imaginons un système  $\Omega$  divisé en volumes élémentaires  $d\Omega$  et limité par une surface fermée  $\Sigma$  divisée en surfaces élémentaires de vecteurs surfaces  $\vec{d}\Sigma$ . Appliquons lui le premier principe, soit puisque le solide a un volume constant et n'échange donc pas de travail,  $dU = \delta Q$ . En raisonnant comme pour la diffusion, on a :

$$\frac{\delta Q}{dt} = -\oint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot \vec{d}\Sigma = -\iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{j}_{th}) d\Omega$$

Un volume élémentaire de masse  $dm = \mu d\Omega$  a une énergie  $dm c T$ ; en raisonnant comme pour la diffusion, on en déduit :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \mu c T d\Omega = \iiint_{\Omega} \mu c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega$$

D'où par identification :

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_{th}) = 0}$$

## XXVI-2.c Loi de FOURIER, équation de diffusion thermique.

### Loi de FOURIER.

Le vecteur densité de flux thermique (ou puissance surfacique) est lié aux inhomogénéités du champ de température. La loi *phénoménologique* de FOURIER rend compte des résultats expérimentaux, indépendamment de toute tentative de justification théorique (il en existe, mais ce n'est pas l'objet du programme). Elle énonce la proportionnalité entre le vecteur densité de flux et le gradient de la température, avec un coefficient négatif car la diffusion thermique se fait des régions chaudes vers les régions froides. On note :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$$

et dans un problème unidirectionnel :

$$j_{th}(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$\lambda$  s'appelle *conductivité thermique*.

La loi de FOURIER est un modèle qui donne une bonne compatibilité avec les résultats expérimentaux; on peut néanmoins la mettre en défaut si les gradients de températures sont très importants ou si les variations temporelles de température sont trop rapides.

### Unité et ordres de grandeur.

La dimension de  $j_{th} = d\mathcal{P}_{th}/dS$  est donc  $[j_{th}] = [\mathcal{P}] L^{-2}$ ; celle de  $\text{grad}(n)$  est en notant  $\Theta$  la dimension d'une température,  $\Theta L^{-1}$ , d'où  $[\lambda] = [\mathcal{P}] \Theta^{-1} L^{-1}$ .  $\lambda$  s'exprime donc en  $W K^{-1} m^{-1}$ .

Pour les ordres de grandeur, il y a apparition d'une distinction parmi les solides; en effet les métaux possèdent des électrons libres susceptibles de se faufler entre les ions et qui ont donc un libre parcours moyen important. Retenons donc :

- gaz :  $\lambda$  de l'ordre de  $10^{-2} \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$  (idem pour les matériaux fibreux, poreux ou alvéolés comme la laine de verre ou le polystyrène expansé)
- liquides et solides sauf métaux :  $\lambda$  de l'ordre de  $1 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$
- métaux :  $\lambda$  de l'ordre de  $5 \cdot 10^2 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$

### Equation de diffusion.

On reporte  $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}n$  dans  $\mu c \partial T / \partial t + \text{div}(\vec{j}_{th}) = 0$  et l'on tire :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

soit en notant  $D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c}$ , appelée par analogie *diffusivité thermique*

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T}$$

Pour les ordres de grandeur, il est à noter que pour les gaz la diffusivité (des particules) et la diffusivité thermique sont très voisines, car le mécanisme de diffusion est identique. Pour les solides ou liquides, la diffusivité thermique est plus importante, car un choc suffit à échanger de l'énergie sans qu'il soit besoin qu'une particule se faufile entre ses voisines; enfin pour un métal la diffusivité thermique est encore plus importante car elle utilise un mécanisme différent (électrons) plus efficace.

Les remarques sur l'irréversibilité et sur les distances et temps caractéristiques de la diffusion de particules restent bien entendu valables.

### XXVI-2.d Régime permanent, conductance thermique.

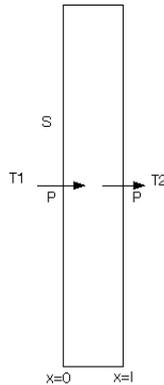
Nous proposons ici une solution particulière de l'équation de diffusion thermique dans le cas d'un régime permanent ( $\partial T / \partial t = 0$ ) et unidirectionnel ( $\Delta T = \partial^2 T / \partial x^2$ ); l'équation de diffusion se résume donc à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

On est dans ce cas pour un mur de surface  $S$  d'épaisseur  $\ell$  entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = \ell$  séparant un milieu ( $x < 0$ ) de température  $T_1$  et un milieu ( $x > \ell$ ) de température  $T_2$ .

L'équation  $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$  a pour solution une fonction du premier degré. Si l'on admet la continuité de la température, on arrive aisément à :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ell} x$$



La densité de flux thermique (ou puissance surfacique) est alors :

$$j_{th}(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ell}$$

Elle est uniforme et la puissance thermique (ou flux thermique qui est un débit d'énergie) à travers tout le mur est donc

$$\mathcal{P}_{th} = j_{th} S = \frac{\lambda S}{\ell} (T_1 - T_2)$$

Par analogie avec :

$$I = G (V_1 - V_2) = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{\gamma S}{\ell} (V_1 - V_2)$$

on appelle *conductance thermique* et *résistance thermique* les grandeurs telles que :

$$G_{th} = \frac{1}{R_{th}} = \frac{\lambda S}{\ell}$$

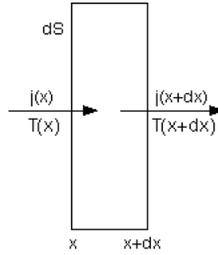
On n'hésitera surtout pas à utiliser l'analogie électrocinétique pour calculer des résistances thermiques équivalentes pour des associations en série (mur de brique doublé d'une couche de polystyrène) ou en parallèle (mur percé d'une fenêtre), voire à utiliser un théorème de MILLMANN thermique pour calculer une température à l'interface entre deux milieux. Attention à utiliser la bonne unité !  $\mathcal{P} = G_{th} \Delta T$  donne une conductance thermique en  $\text{W K}^{-1}$ .

Notons toutefois que l'hypothèse de continuité de la température n'est pas toujours vérifiée, nous en verrons quelques exemples en exercice.

**remarque : densité volumique d'entropie créée.**

Considérons dans le problème du mur un volume élémentaire de section  $d\Sigma$  arbitraire et d'épaisseur  $dx$  entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . Appliquons lui, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , le second principe sous la forme :

$$dS = \sum \frac{\delta Q}{T_{ext}} + dS_{créée}$$



En régime permanent,  $dS = 0$ . Par ailleurs,  $\sum \delta Q/T_{ext}$  est somme de deux termes, d'une part  $+j_{th}(x) d\Sigma dt/T(x)$ , d'autre part  $-j_{th}(x+dx) d\Sigma dt/T(x+dx)$ . On en déduit après un développement de TAYLOR à l'ordre un :

$$dS_{créée} = \frac{d}{dx} \left( \frac{j}{T} \right) dx d\Sigma dt$$

On peut donc définir une vitesse volumique de création d'entropie par :

$$\frac{dS_{créée}}{dx d\Sigma dt} = \frac{d}{dx} \left( \frac{j}{T} \right)$$

Reportons-y la loi de FOURIER :

$$\frac{dS_{créée}}{dx d\Sigma dt} = -\lambda \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right) = -\frac{\lambda}{T} \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2$$

soit, puisque  $d^2 T/dx^2 = 0$  :

$$\frac{dS_{créée}}{dx d\Sigma dt} = \frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2$$

On trouve, bien sûr un résultat positif, mais aussi un résultat qui met en évidence que ce sont les inhomogénéités de température qui sont source d'irréversibilité et aussi que si les gradients sont faibles, donc leurs carrés négligeables, une transformation est alors quasiment isentropique.

### XXVI-3 Autres phénomènes diffusifs.

Il y a diffusion dès que l'inhomogénéité d'un paramètre physique provoque un flux de densité proportionnelle au gradient du paramètre inhomogène. Citons, en présentation unidirectionnelle :

- une inhomogénéité de densité particulaire provoque un flux de particules vérifiant le loi de FICK :

$$\delta N = j dS dt \text{ avec } j = -D \partial n / \partial x$$

- une inhomogénéité de température provoque un flux de chaleur vérifiant le loi de FOURIER :

$$\delta Q = j dS dt \text{ avec } j = -\lambda \partial T / \partial x$$

- une inhomogénéité de potentiel électrique provoque un flux de charges vérifiant le loi de OHM :

$$\delta q = j \, dS \, dt \text{ avec } j = -\gamma \partial V / \partial x = \gamma E$$

- une inhomogénéité de vitesse provoque un flux de quantité de mouvement vérifiant le loi de viscosité :

$$\delta p_x = F_x \, dt = j \, dS \, dt \text{ avec } j = -\eta \partial v_x / \partial z$$

(dans le sens des  $z$  croissants)

A ce stade, il y a convergence totale entre les différentes situations, ce qui fait ensuite la différence, c'est l'équation bilan dans laquelle on reporte ces formules :

- conservation des particules :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

d'où (cf *supra*) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = D \Delta n$$

- premier principe de la thermodynamique :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

d'où (cf *supra*) :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lambda \Delta T$$

(Même type de bilan et donc même équation de diffusion)

- équation de MAXWELL-FARADAY pour l'effet de peau aboutissant, en en prenant le rotationnel à :

$$\mu_0 \gamma \frac{\partial B}{\partial t} = \Delta B$$

- bilan de forces aboutissant à l'équation de NAVIER-STOKES :

$$\mu \frac{Dv}{Dt} = \eta \Delta v + \dots$$

(on retrouve bien les mêmes termes qu'une équation de diffusion, mais il y a des termes « parasites » : accélération convective, gradient de pression, etc.)

On obtient dans tous ces cas des formes voisines d'équations de diffusion.